Solución para caso de tecnología lineal:

- $y_t = A_t l_t \qquad (\alpha = 0)$.
- Economía dura T períodos

Condiciones de optimalidad:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t) \longrightarrow \text{intertemporal (Euler)}$$

$$\frac{\gamma C_t}{H - l_t} = A_t \longrightarrow \text{intratemporal}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \qquad y_t = A l_t$$

$$\gamma C_t = AH - A l_t \iff A l_t = AH - \gamma C_t$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} - \gamma \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$$(1+\gamma) \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum \frac{A_t H}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta(1+r_{t-1}) \implies \begin{aligned} C_t &= \beta(1+r_{t-1}) C_{t-1} \\ C_{t-1} &= \beta(1+r_{t-2}) C_{t-2} \\ &\vdots \\ C_2 &= \beta(1+r_1) C_1 \end{aligned}$$

$$C_t = \beta^{t-1}(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1}) C_1 \implies \frac{C_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \beta^{t-1} C_1$$

$$(1+\gamma) \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} C_1 = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$$\implies \boxed{C_1^* = \frac{1}{(1+\gamma)(1+\beta+\cdots+\beta^{T-1})} \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \right)}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} = \frac{1}{1-\beta}$$

Riqueza del hogar en valor presente

$$\boxed{C_t^* = \frac{\beta^{t-1}(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})}{(1+r)(1+\beta+\dots+\beta^{t-1})} \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} \right)}$$

Equilibrio: condiciones de vaciado:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} y_{it}^* \quad , \quad t=1,\dots,T$$

$$\sum_{i=1}^{I} b_{it}^* = 0 \quad , \quad t=1,\dots,T$$

Asumiendo tecnología lineal ($y_t = A_t l_t$) es posible encontrar analíticamente las tasas de interés de equilibrio con agentes heterogeneos con función de producción Cobb-Douglas siempre y cuando β y γ sean iguales a través de los hogares.

$$y_t = A_t l_t \qquad \frac{\gamma c_t}{H - l_t} = A_t \quad \Rightarrow \quad A_t l_t = A_t H - \gamma c_t = y_t$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} A_{it} H - \sum_{i=1}^{I} \gamma c_{it}^*$$

$$\Leftrightarrow (1+\gamma) \sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} A_{it} H$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \frac{1}{1+\gamma} \sum_{i=1}^{I} A_{it} H$$

$$c_{it+1} = \beta(1+r_t) c_{it} \quad \forall i \in \{1,\dots,I\},$$

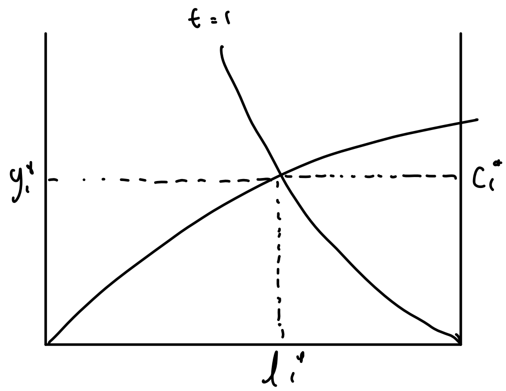
$$\sum_{i=1}^{I} c_{it+1} = \sum_{i=1}^{I} \beta(1+r_t) c_{it} = \beta(1+r_t) \sum_{i=1}^{I} c_{it}$$

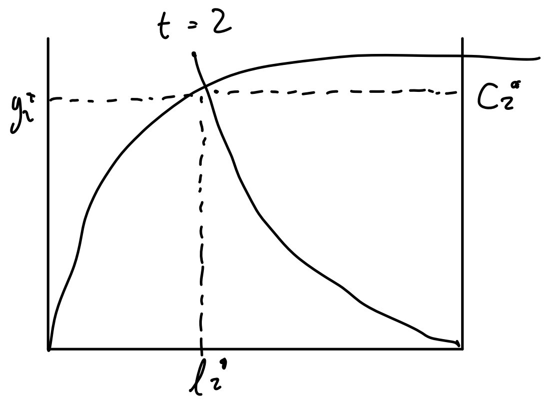
$$\Rightarrow 1+r_t = \frac{\sum_{i=1}^{I} c_{it+1}}{\beta \sum_{i=1}^{I} c_{it}}$$

$$\Rightarrow \boxed{1+r_t = \frac{\sum_{i=1}^{I} A_{it+1} H}{\beta \sum_{i=1}^{I} A_{it} H}}$$

✓

Con agente representativo: $c_t = y_t$, $b_t = 0$





$$c_{t+1} = \beta(1+r_t)c_t, \quad \Rightarrow \quad 1+r_t = \frac{c_{t+1}}{\beta c_t}$$

$$c_t = A_t l_t \quad \Rightarrow \quad 1+r_t^* = \frac{A_{t+1}\cancel{H}}{\beta A_t \cancel{H}} = \frac{A_{t+1}}{\beta A_t}$$

$$\boxed{l_t^* = \frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma}}$$

Modelo competitivo con producción:

- Hasta ahora, habíamos asumido que no había mercado laboral.
- Producción se hacía "en casa".
- Ahora asumimos que sí hay mercado laboral y las firmas contratan trabajo a un precio w.
- Hay J firmas.
- Ahora también hogares pueden vender y comprar acciones de firmas.
- Modelo ahora tiene mercado accionario.
- Función de producción: $y_{jt} = A_{jt} l_{jt}^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Problema de la firma:

$$\max_{l_1,\dots,l_T} \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t l_t^{1-\alpha} - w_t l_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

En modelo estático:

$$\max_{l} \; y - wl$$

$$[l_t]: \frac{(1-\alpha)A_t l_t^{-\alpha} - w_t}{\cancel{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}} = 0$$

$$\iff \underbrace{(1-\alpha)A_t l_t^{-\alpha}}_{BMg_L} = \underbrace{w_t}_{CMg_L}$$

→ misma condición de optimalidad.

Es equivalente a que la firma resuelva:

$$\max_{l_{jt}} \; y_{jt} - w_t l_{jt}, \quad t = 1,\dots,T$$

Esto ocurre porque en este modelo en particular la firma <u>NO</u> tiene ninguna decisión de carácter dinámico.

$$\boxed{l_{jt}^* = \left(\frac{(1-\alpha)A_{jt}}{w_t}\right)^{1/\alpha}}$$

$$\boxed{y_{jt}^* = A_{jt}\left(\frac{(1-\alpha)A_{jt}}{w_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$$

$$\boxed{\pi_{jt}^* = \alpha A_{jt}\left(\frac{(1-\alpha)A_{jt}}{w_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$$

Problema del consumidor:

$$\max_{\substack{c_1,\dots,c_T\\ n_1,\dots,n_T\\ b_1,\dots,b_{T-1}\\ \theta_{ij1},\dots,\theta_{ijT-1}}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}\left(\ln c_t + \gamma \ln(H-n_t)\right) \quad \text{s.a.}$$

$$c_{it} + b_{it} + \sum_{j=1}^{J} v_{jt}\left(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1}\right) = w n_{it} + (1+r_{t-1})b_{t-1} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ijt-1}\pi_j^*(w_t)$$

Ganancias que recibe el hogar por tener acciones en las firmas. Ingresos NO laborales.

Supuesto: ganancias de la firma se pagan un periodo después de comprar acciones.

ϑ_{jt} : el valor de mercado de la firma j en el periodo t.

θ_{ijt} : acciones que i compra de la firma j en el periodo t

θ_{ijt-1} : acciones que i tiene desde t-1 en la firma j.

$(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1})$

$\theta_{ijt-1} = 0.1 \quad , \quad \theta_{ijt} = 0.2$

$(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1}) = 0.2 - 0.1 = 0.1$

$\vartheta_{jt}(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1})$ = valor a pagar para terminar el periodo con θ_{ijt} acciones en la firma j.

Mercados: (1) bienes : 1 (2) bonos : r_t (3) laboral : w_t (4) accionario : ϑ_{jt}

En equilibrio ahora debemos encontrar 2 nuevos precios: w_t, ϑ_{jt}

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}\left(\ln c_t + \gamma \ln(H - n_t)\right) +$$

$$\sum_{t=1}^{T} \lambda_t \Big(n_t w_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ijt-1} \pi_{jt}(w_t) - c_t - b_t - \sum_{j=1}^{J} \vartheta_{jt}(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1})\Big)$$

$$\simeq \ldots + \lambda_t \Big(n_t w_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ijt-1}\pi_{jt}(w_t) - c_t - b_t - \sum_{j=1}^{J} \vartheta_{jt}(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1}) \Big)$$
$$+ \lambda_{t+1}\Big(n_{t+1} w_{t+1} + (1+r_t) b_t + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ijt}\pi_{jt+1}(w_{t+1}) - c_{t+1} - b_{t+1} - \sum_{j=1}^{J} \vartheta_{jt+1}(\theta_{ijt+1} - \theta_{ijt})\Big) + \ldots$$

$[c_t]: \quad \dfrac{\beta^{t-1}}{c_t} = \lambda_t$

$[n_t]: \quad \dfrac{\beta^{t-1}\gamma}{H - n_t} = \lambda_t w_t$

$[b_t]: \quad \lambda_t = (1+r_t)\lambda_{t+1}$

$[\theta_{ijt}]: \quad -\lambda_t \vartheta_{jt} + \lambda_{t+1}\left(\pi_{jt+1}(w_{t+1}) + \vartheta_{jt+1}\right) = 0$

$$\lambda_t \vartheta_{jt} = \lambda_{t+1}\left(\pi_j(\omega_{t+1}) + \vartheta_{j\,t+1}\right)$$

$$(1+r_t)\cancel{\lambda_{t+1}}\vartheta_{jt} = \cancel{\lambda_{t+1}}\left(\pi_j(\omega_{t+1}) + \vartheta_{j\,t+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{1+r_t}_{\text{retorno de los bonos.}} = \underbrace{\frac{\pi_j(\omega_{t+1}) + \vartheta_{j\,t+1}}{\vartheta_{jt}}}_{\text{retorno de invertir en la firma } j}$$

← condición de no arbitraje.

Si $1+r_t < \dfrac{\pi_j(\omega_{t+1}) + \vartheta_{j\,t+1}}{\vartheta_{jt}}$ hogares van a querer pedir ∞ deuda ~~para comprar~~ ∞s firmas. NO puede ocurrir

⇒ en equilibrio el retorno de bonos y firmas tiene que ser idéntico.

⇒ en eq. el hogar es indiferente entre invertir en bonos o invertir en firmas.